

自由曲面构造及其在CAM中的应用

徐志根

(西南交通大学 计算机与通信工程学院 成都 610031)

王 健

(东方汽轮机厂 德阳 618201)

【摘 要】 本文讨论用有理函数参数方程理论实现三维空间自由曲面构造的方法,并粗略描述了运用该方法实现计算机辅助制造的算法。

【关键词】 有理函数;三维空间;计算机辅助制造;数控;自由曲面

【分类号】 TH164;TP391.73

CAD/CAM技术的发展使得三维空间曲面的构造及计算显得极为重要。目前在这一领域流行的有著名的 Coons 曲面及 Bezier 曲面。但 Coons 曲面的产生需要先假设一组数据,产生一个曲面片,进而加以改进,而在角点定位,切线向量,转角向量的值通常位于不同的级数范围,用户不易把握这些值的改变对曲面片形状的影响^[1]。Bezier 曲面是通过改变开多边形顶点的个数来调整构成曲面片四条边界曲线的形状及弹性,进而改善曲面的造型,这对于设计者非常不利^[1,2]。本文介绍用有理函数参数曲线构成曲面片的四条边界线,并导出双参数有理函数构造自由曲面的方程。

1 数学原理^[3-7]

1.1 有理函数参数矢量的定义

$$\vec{V}(t) = \frac{\vec{A}t^3 + \vec{B}t^2 + \vec{C}t + \vec{D}}{at^3 + bt^2 + ct + d}$$

如此定义的可理函数参数矢量有如下性质:

(1) 当 $a = b = c = 0$ 时, $\vec{V}(t)$ 为三次参数曲线;

(2) 当 $a = 0, \vec{A} = 0$ 时, $\vec{V}(t)$ 为二次曲线;

(3) 若 $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ 中任意三个矢量共线,且其模的对应参数 a, b, c , 成比例,则 $\vec{V}(t)$ 表示空间直线,因此,如此定义的可理函数参数矢量 $\vec{V}(t)$ 可以将三次曲线,二次曲线,直线及点(直线的退化形式)统一于此。

1.2 有理函数参数曲线的定义

实际应用中用齐次镜像法构造有理函数参数曲线。设 $\vec{V}_i = [x_i \ y_i \ z_i \ 1]$, $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4$ 为四个空间点, 则有如下有理函数参数曲线的定义

$$\vec{V}_p(t) = \vec{V}(t)B(t) = \vec{T}M[B_1\vec{V}_1 \ B_2\vec{V}_2 \ B_3\vec{V}_3 \ B_4\vec{V}_4]^T$$

其中 $\vec{T} = [1 \ t \ t^2 \ t^3]$ $0 \leq t \leq 1$ 称为参数矩阵, M 为 Ball 曲线特征矩阵

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$B(t)$ 是标量函数

$$B(t) = \vec{T}M[B_1 \ B_2 \ B_3 \ B_4]^T \quad 0 \leq B_i \leq 1$$

由此可推导如下性质

$$(1) \vec{V}_p(t) = [x(t)B(t) \ y(t)B(t) \ z(t)B(t) \ B(t)]$$

这表明, 在求得 $\vec{V}_p(t)$ 后, 以其第四分量除其本身结果恰为 $\vec{V}(t)$;

(2) 与 Bezier 曲线相似, 只有 $\vec{V}_1, \vec{V}_4$ 位于曲线上, 是曲线的二个端点, $\vec{V}_2, \vec{V}_3$ 不在曲线上;

(3) 当 B_i 相等时, $\vec{V}_p(t)$ 为三次参数曲线, $B_2 = B_3$, 且 $\vec{V}_2 = \vec{V}_3$ 时, $\vec{V}_p(t)$ 为圆锥曲线, $B_1 = B_4$, $B_2 = B_3 = 0$ 时, $\vec{V}_p(t)$ 为联接 $\vec{V}_1, \vec{V}_4$ 的空间直线;

图 1 表示曲线的几何意义。其中 $\vec{V}_2$ 在 $\vec{V}_1$ 的切矢 $\vec{T}_1$ 方向上, $\vec{V}_3$ 在 $\vec{V}_4$ 的切矢 $\vec{T}_4$ 方向。

设 $B_2 = B_3 = f$

$$B_1 = B_4 = 1 - f$$

取 $0 \leq f \leq 1$

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \lambda \vec{T}_1$$

$$\vec{V}_3 = \vec{V}_4 + \mu \vec{T}_4$$

显然, 如此定义的曲线可通过改变 f, λ, μ 三个参数来控制曲线的形状。

1.3 曲面构造及其方程

图 2 所示, 整张曲面由 $n+1$ 根框向(w 向)网格线及 $m+1$ 根纵向(u 向)网格线划分成 $n \times m$ 个网格, 网格就成了组成曲面的基本单元, 称为曲面片, 如图 3 所示。下面讨论曲面片的方程。

设曲面片的四条边界曲线均为有理函数参数曲线, u, w 为纵向及框向参数。因此框向曲线可表示为 $\vec{A}(u)$ 。以 $\vec{A}(0)$ 为母线, 随纵向参数 u 方向以二条纵向曲线($w=0$ 及 $w=1$)为边界基线逐渐变化, 最终与 $\vec{A}(1)$ 重合, 这就是曲面片构造的基本思想。由此构成的曲面片的双参数方程有

$$\vec{A}_p(u, w) = \vec{A}(u, w)B(u, w) = \vec{W}M \begin{bmatrix} (1-f(u)) \vec{A}_1(u) \\ f(u) \vec{A}_2(u) \\ f(u) \vec{A}_3(u) \\ (1-f(u)) \vec{A}_4(u) \end{bmatrix}$$

其中

$$B(u, w) = \vec{W}M \begin{bmatrix} 1-f(u) \\ f(u) \\ f(u) \\ 1-f(u) \end{bmatrix}$$

$$f(u) = \vec{U}M[f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4]^T$$

$$\vec{U} = [1 \ u \ u^2 \ u^3] \quad 0 \leq u \leq 1$$

$$\vec{W} = [1 \ w \ w^2 \ w^3] \quad 0 \leq w \leq 1$$

M 仍是 Ball 曲线特征矩阵。

$f(u)$ 是一条标量函数曲线,其构造同有理函数参数曲线。 f_1, f_4 对应于 $\vec{A}(0), \vec{A}(1)$ 的 f 值,而 f_2, f_3 根据 f_1, f_4 及其端点切矢值求得。 $\vec{A}_1(u), \vec{A}_2(u), \vec{A}_3(u), \vec{A}_4(u)$ 分别位于 $w=0$ 及 $w=1$ 的二条边界基线上,而 $\vec{A}_2(u), \vec{A}_3(u)$ 分别确定了 $\vec{A}_1(u), \vec{A}_4(u)$ 的跨边斜率,其模长也影响着曲面的形状。图4所示为 $\vec{A}_4(u)$ 几何意义。

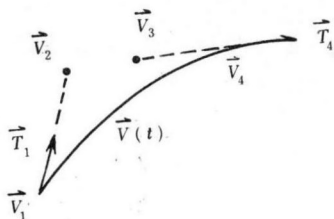


图1 几何意义

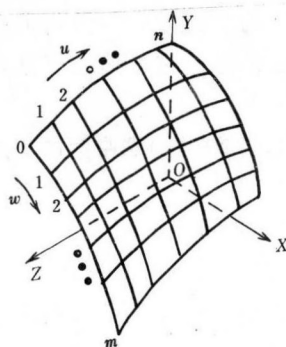


图2 曲面网格划分

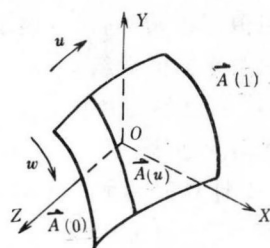


图3 曲面片

设 $\vec{A}_2(u), \vec{A}_3(u)$ 可分解为方向矢量 $\vec{B}_2(u), \vec{B}_3(u)$ 及模值 $\lambda(u)$ 和 $\mu(u)$ 表示,则有

$$\vec{A}_2(u) = \vec{A}_1(u) + \lambda(u)[\vec{B}_2(u) - \vec{A}_1(u)] = [1 - \lambda(u)]\vec{A}_1(u) + \lambda(u)\vec{B}_2(u)$$

$$\vec{A}_3(u) = \vec{A}_4(u) + \mu(u)[\vec{B}_3(u) - \vec{A}_4(u)] = [1 - \mu(u)]\vec{A}_4(u) + \mu(u)\vec{B}_3(u)$$

其中

$$\lambda(u) = \vec{U}M[\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_4]^T$$

$$\mu(u) = \vec{U}M[\mu_1 \ \mu_2 \ \mu_3 \ \mu_4]^T$$

$\lambda(u), \mu(u)$ 为两条标量函数曲线,意义与 $f(u)$ 相同。 $\vec{B}_2(u)$ 及 $\vec{B}_3(u)$ 为根据用户要求设计给出的边界条件(以直线、圆弧、抛物线相切规律或其它条件)。因此,整个曲面片可通过 $f(u), \lambda(u),$

$\mu(u)$ 三条标量曲线来控制其形状的变化。图5为曲面片的所有信息。一张曲面片由 $(\vec{A}_{11}, \vec{A}_{14})$, $(\vec{A}_{21}, \vec{A}_{24})$, $(\vec{A}_{31}, \vec{A}_{34})$, $(\vec{A}_{41}, \vec{A}_{44})$ 及 $f(u)$ 五条纵向曲线唯一地确定。其中, $(\vec{A}_{11}, \vec{A}_{14})$ 和 $(\vec{A}_{41}, \vec{A}_{44})$ 在曲面片上, $(\vec{A}_{21}, \vec{A}_{24})$ 及 $(\vec{A}_{31}, \vec{A}_{34})$ 不在曲面片上, 是曲面片的跨边斜率定义线, 用于保证各相邻曲面片边与边之间一阶导数的连续。

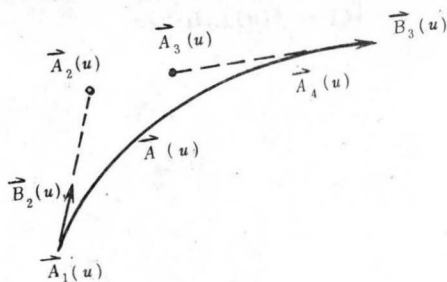
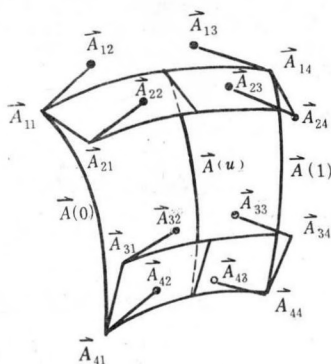
图4 $\vec{A}_i(u)$ 几何意义

图5 曲面片信息

2 算法描述^[7]

(1) 工程上,设计图纸往往是在一系列控制切面上按平面坐标系给出设计规律或离散点数据,应首先由图纸求得所有交点及切点。

(2) 将上述交点、切点及各控制切面原点位置转换成空间数模坐标值,包括坐标旋转,平移和型值点加密等,产生构成曲面的各网格线的交点及各控制切面在空间数模坐标系中的原点及法矢坐标值数组。

(3) 根据曲面片构造思想计算并产生构成曲面的所有信息,实现曲面片划分,求得全部纵向及框向网格线。

(4) 计算刀具加工中心轨迹,包括:

- (a) 设置初始站位,框向及纵向步长及刀具半径;
- (b) 由空间数模坐标系转换到数控机床工作台坐标系;
- (c) 根据加工工艺及方式要求,计算产生所有加工数据,对扭曲度较大的部分进行插值加密运算;

(d) 输出所有加工数据的坐标值,斜率、高斯曲率及斜角值。

(5) 后置处理。根据机床型号及其通道号,设置三坐标或四坐标联动特征值、转速、定位点、程序段长度及程序中 G 指令及 M 功能指令等参数,最终将加工数据转换成机床可以直接运行的 ISO 数控加工程序。

3 结束语

目前国内有不少用于不同目的 CAM 系统,就本系统而言,运用有理函数理论实现了三维空间自由曲面的构造及数控加工程序的自动生成,该系统应用于汽轮机叶片的计算机辅助

制造,取得了较好的效果。

参 考 文 献

- 1 林志成,庄晋中. 电脑绘图原理. 台湾:自动化科技出版社,1986
- 2 杨钟藩. 微型计算机绘图及其程序设计. 北京:电子工业出版社,1987
- 3 Ball A A. Introduction of the conic cofting tile. CAD,1974;6
- 4 Ball A A. Description of the algorithms. CAD,1975;7
- 5 Ball A A. How the program is used. CAD,1977;9
- 6 李建新. 计算几何学中的有理函数法. 峨眉情报,1981;(4)
- 7 徐志根. C-SURF 系统在 PC 机上的移植:[硕士学位论文]. 成都:西南交通大学,1988

Free Camber Moulding and Its Application in CAM

Xu Zhigen

(School of Computer and Comm. Eng., Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Wang Jian

(Dong-Fang Turbine Factory, Deyan 618201, China)

【Abstract】 The way of realizing free camber mouldiing in three-dimensional space with rational functions is introduced in this paper, and the programming algorithms for applying this method to CAM are also discussed.

【Keywords】 rational functions; three-dimensional space; computer aided manufacturing; numerical control; free camber