

文章编号:1672—7940(2009)01—0006—06

电导率分块均匀大地电磁场二维有限元数值模拟

叶益信¹, 胡祥云¹, 何梅兴¹, 廖国忠¹, 金钢燮^{1,2}

(1. 中国地质大学 地球物理与空间信息学院, 武汉 430074;

2. 金策工业综合大学, 朝鲜平壤)

摘要:给出了电导率分块均匀大地电磁场二维有限元正演算法。该算法采用矩形网格内进一步三角形细化的方式剖分模型, 在每个三角形单元内利用线性插值函数来模拟单元内的场值, 这样既利用了矩形网格在编程中的方便特性, 又通过三角形网格提高了对倾斜接触面及起伏地形的近似程度, 而且不明显增加计算量。本文首先通过对一个水平均匀层状模型进行正演, 并与解析解对比, 验证了本算法的准确性, 最后通过对两个较复杂模型的正演, 进一步表明了该算法的有效性和可行性。

关键词:大地电磁; 二维; 有限元; 正演

中图分类号: P631.3

文献标识码: A

收稿日期: 2008—10—16

Finite Element Modeling of 2D MT with Block Homogeneous Conductivity

Ye Yixin¹, Hu Xiangyun¹, He Meixing¹, Liao Guozhong¹, Jin Gangxie^{1,2}

(1. Institute of Geophysics and Geomatics, China University of Geoscience, Wuhan 430074, China;

2. Kimchaek University of Technology, Pyongyang Korea)

Abstract: A numerical algorithm of the finite element method (FEM) for 2D MT forward modeling with block homogeneous conductivity has been developed in this paper. This algorithm subdivides four triangular lattices by adding two diagonal lines in a rectangular cell, and the total field parallel to strike over triangular elements is computed by linear interpolation. This allows accurate modeling of inclined interface and topographic surface, and writing codes is facilitated with using rectangular mesh. The comparison between the algorithm's solution and the analytic solution of one synthetic layered model indicates that the algorithm is accurate. Lastly, application of the algorithm to two more complex synthetic models indicates that the algorithm is effective and feasible.

Key words: Magnetotelluric (MT); two dimensions (2D); finite element; forward modeling

基金项目: 国家自然科学基金(编号:40744022)和湖北省科研基金(编号:2007ABA317)资助。

作者简介: 叶益信(1983—), 男, 江西万年人, 中国地质大学(武汉)地球探测与信息技术硕士研究生, 主要研究方向为电磁法正反演研究。E-mail: yixinye321@126.com

胡祥云(1966—), 男, 江西吉安人, 教授, 博士生导师, 中国地质大学(武汉)地球物理与空间信息学院, 主要从事电磁法理论及应用教学与研究工作。

1 引言

国外很早就开始了大地电磁场的数值模拟研究,1971年 Coggon 提出利用有限元数值模拟方法计算大地电磁场,他详细阐述了怎样用有限元法模拟大地电磁场,从能量最小原理推导出亥姆霍兹方程的有限元格式^[1]。Rodi 于 1976 年提出一个高准确性的有限元算法,主要是通过提高所求辅助场的精度,来提高算法的整体精度^[2]。Rijo 于 1977 年提出一个用于求解总场的有限元算法^[3]。Wannamaker 等于 1985,1986 年研究了二维带地形正演问题。Ward, Pridmorede 等也都曾在有限元正演方面做过一些工作^[4]。在国内,很多学者也曾在大地电磁的二维有限元正演方面做过工作,如陈乐寿,周熙襄等^[5]。徐世浙曾深入研究了有限元法在地球物理中的应用,就大地电磁的二维带地形问题提出了修正的视电阻率定义式,并对于 TE, TM 两种模式下的视电阻率畸变做出了合理的物理解释^[6]。王绪本,胡文宝等人也在这一方面做过一些工作^[7]。

本文通过合理的模型剖分,使该算法能达到满足精度的要求,又不使计算量过大,从而节约了计算机内存和计算时间,下面通过该算法在有解析解的水平层状模型中的应用,检验算法的准确性,然后通过两个较复杂模型中的应用,分析模型的正演特性。这些由正演得到的结论,对于资料处理、反演、解释具有积极的指导作用,能为准确的处理解释资料提供帮助。

2 变分问题

已知在二维地电模型情况下,大地电磁场的分布遵从如下亥姆霍兹方程:

$$\frac{\partial(\frac{1}{\eta} \frac{\partial V}{\partial y})}{\partial y} + \frac{\partial(\frac{1}{\eta} \frac{\partial V}{\partial z})}{\partial z} - \gamma V = 0 \quad (1)$$

在 TE 模式下, $V = E_x$, $\eta = -i\omega\mu$, $\gamma = \sigma$, 在 TM 模式下, $V = H_x$, $\eta = \sigma$, $\gamma = -i\omega\mu$, 其中, V 为电场或磁场值, ω 为角频率, σ 和 μ 为介质电导率和磁导率值, i 为虚数单位。

从解偏微分方程变分方法的原理可知,与解上述偏微分方程相应的变分问题是:在满足给定边界条件 $V|_r = \phi(y, z)$ 及在域 G 和边界 Γ 上连续

可微的函数集合中寻求使泛函

$$I(V) = \iint_G \left\{ \frac{1}{\eta} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{\eta} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 - \gamma V^2 \right\} dydz \quad (2)$$

取极小值的函数 $V(y, z)$ 。

3 有限元解法

用有限元求解变分问题的步骤如下^[8]:

3.1 区域剖分

理论上区域可剖分成由互不重叠的多边形基本单元组成的网格,为使程序简化,本文采用如图 1 所示的剖分方法,即把求解区域分解成规则的矩形网格,每个矩形单元由两条对角线分解成 4 个小三角形单元,每个三角形单元的电阻率均匀。

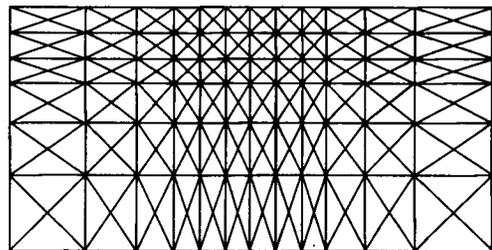


图 1 区域剖分示意图

Fig. 1 Schematic diagram for finite element mesh

3.2 线性插值

在三角形单元 e 上,记三角形三个顶点按逆时针方向分别为: i, j, k , 每个顶点的坐标分别为: $(y_i, z_i), (y_j, z_j), (y_k, z_k)$, 每个顶点的场值为: V_i, V_j, V_k , 则通过线性插值可得单元内的场值分布为:

$$V_e(y, z) = N_i(y, z)V_i + N_j(y, z)V_j + N_k(y, z)V_k \quad (3)$$

其中, $N_i = \frac{1}{2\Delta}(a_i + b_i y + c_i z)$, $N_j = \frac{1}{2\Delta}(a_j + b_j y + c_j z)$, $N_k = \frac{1}{2\Delta}(a_k + b_k y + c_k z)$, 而, $a_i = y_j z_k - y_k z_j$, $a_j = y_k z_i - y_i z_k$, $a_k = y_i z_j - y_j z_i$, $b_i = z_j - z_k$, $b_j = z_k - z_i$, $b_k = z_i - z_j$, $c_i = y_k - y_j$, $c_j = y_i - y_k$, $c_k = y_j - y_i$, $\Delta = (b_i c_j - b_j c_i) / 2$

3.3 单元分析

下面以三角形单元 e 为列,计算式(2)中的泛函,根据式(3)可计算出 $\frac{\partial V_e}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial V_e}{\partial z}$ 的值,将它们连同 V_e 本身代入类似式(2)中的单元泛函中,然后逐项进行积分,就可得到单元泛函的近似值为:

$$I(\mathbf{V}_e) = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_e)^T \mathbf{K}_e \mathbf{V}_e \quad (4)$$

其中, $\mathbf{V}_e = [\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j, \mathbf{V}_k]^T$, 刚度矩阵 \mathbf{K}_e 是一个 3×3 阶对称矩阵^[5]。

考虑到一个矩形小单元内, 四个小三角形的面积相等, 可用四个小三角形的刚度矩阵 \mathbf{K}_e 合成矩形单元的刚度矩阵 \mathbf{K}_e , 它是一个 4×4 阶对称矩阵^[9], 那么矩形单元内的泛函近似值可表示为:

$$I(\mathbf{V}_e) = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_e)^T \mathbf{K}_e \mathbf{V}_e \quad (5)$$

3.4 总体合成

为了得到整个域上的泛函近似表达式, 只需将各单元刚度矩阵的元素按下标位置排好后相加, 合成域上的总刚度矩阵 \mathbf{K}' , 再将每行节点处的场值构成的列矢量首尾相接, 合成总的列矢量 \mathbf{V} , 这样得到总的泛函表达式为:

$$I(\mathbf{V}) = \sum I(\mathbf{V}_e) = \frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{K}' \mathbf{V} \quad (6)$$

\mathbf{K}' 是由类似 \mathbf{K}_e 中元素组成的 $(M+1)(N+1) \times (M+1)(N+1)$ 阶的方阵。

考虑边界条件, 由文献[5]知两个侧边界条件的泛函均为 0, 而上下两个边界条件的泛函表达式分别为^[5]:

$$I(\mathbf{V}_1) = \frac{1}{2} \mathbf{V}_1^T \mathbf{T}_1 \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_1^T \mathbf{f}_1 \quad (7)$$

$$I(\mathbf{V}_{M+1}) = \frac{1}{2} \mathbf{V}_{M+1}^T \mathbf{T}_{M+1} \mathbf{V}_{M+1} - \mathbf{V}_{M+1}^T \mathbf{f}_{M+1} \quad (8)$$

将(6)、(7)、(8)式相加, 可得包括边界条件的总泛函表达式为:

$$I(\mathbf{V}) + I(\mathbf{V}_1) + I(\mathbf{V}_{M+1}) = \frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} - \mathbf{V}^T \mathbf{f} \quad (9)$$

式中 \mathbf{K} 是 \mathbf{K}' 、 \mathbf{T}_1 、 \mathbf{T}_{M+1} 的总体合成, 它是一个稀疏、对称、正定的大型变带宽矩阵, \mathbf{f} 是由 \mathbf{f}_1 和 \mathbf{f}_{M+1} 的总体合成。

为了使(9)式取极小值, 则要满足下列矩阵方程^[5]:

$$\mathbf{K} \mathbf{V} = \mathbf{f} \quad (10)$$

解上述线性方程组, 就可得到各节点的 \mathbf{V} 值。

4 正演计算

为了验证本文正演方法的有效性, 首先建立有解析解的一个水平层状地电模型进行检验, 之后应用该方法对两个较复杂模型进行正演计算和

分析。

模型 1 为 H 型三层地电模型, 其模型参数为: $\rho_1 = 100 \Omega \cdot \text{m}$, $\rho_2 = 10 \Omega \cdot \text{m}$, $\rho_3 = 500 \Omega \cdot \text{m}$, $h_1 = 680 \text{m}$, $h_2 = 551 \text{m}$ 。正演计算时采用不同 Z 轴宽度的网格, 其中网格 1 的 Z 轴宽度为(单位: m): 50 50 100 100 200 200 200 200 200 300 300 400 400 500 500 1000 1000 2000 2000 5000; 网格 2 的 Z 轴宽度为(单位: m): 50 50 100 100 100 100 50 50 100 100 100 100 100 200 200 300 300 400 400 500 500 1000 1000 2000 2000 5000; 网格 3 的 Z 轴宽度为(单位: m): 100 100 200 200 200 300 300 400 400 500 500 1000 1000 2000 2000 5000。接收频点从 1024 ~ 0.0017 Hz 共 20 个频点, 计算结果如表 1 所示。数据统计表明: 网格 1 的计算结果最大相对误差为 9.77%, 网格 2 的计算结果最大相对误差为 5.01%, 网格 3 的计算结果最大相对误差为 14.5%, 很显然, 采用网格 2 的计算结果精度最高, 采用网格 1 的计算结果精度次之, 采用网格 3 的计算结果精度最低。这说明模型的剖分对计算结果的影响较大, 合理的模型剖分能使计算结果的精度提高较大。三种不同网格的计算结果对比表明, 模型剖分的越细, 计算结果精度越高, 反之亦然, 但是为了尽量减少计算量, 本文采用的是大致在边界附近对网格加密, 而在电性均匀体内, 网格的宽度尽量保持不变, 这样既可提高计算精度, 又能节约计算时间。

模型 2 如图 2 所示, 加号表示测点的位置, 正演计算时采用的频点与模型 1 一致, 网格与网格 2 一致, 点距为 200m, 21 个测点的结果如图 3 所示。从图 3 可看出, 中间层的倾斜低阻体和两旁的楔形高阻体均得到很明显的反映, 尤其是在 TE 模式的视电阻率断面图上和相位断面图上, 在 TM 模式下的视电阻率断面图上, 低阻体和高阻体均能被明显的反映出来, 但它们的形态都被

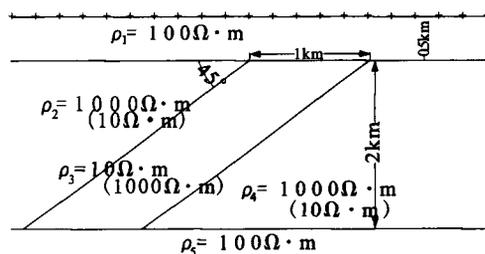


图 2 模型 2(3)地电断面示意图

Fig. 2 Schematic diagram for geoelectric section of model two (three)

表 1 H 型模型不同网格的正演结果与解析解的对比

Table 1 Comparison between analytical and numerical solutions of different meshes for model H

频点/Hz	解析解/ $\Omega \cdot m$	网格 1 计算结果	网格 2 计算结果	网格 3 计算结果
1024.0	100.02601	100.025	100.021	99.97752
512.0	99.54815	99.6170	99.4568	99.4067
256.0	101.04949	100.629	101.842	103.645
128.0	110.22698	109.344	111.533	113.465
64.0	114.24347	114.594	113.321	110.859
32.0	98.75065	100.688	95.5150	89.2504
16.0	69.93770	73.0758	66.5878	59.7957
8.0	43.98505	46.2836	41.7812	37.6212
4.0	29.93105	30.5421	28.7470	27.4509
2.0	26.89175	25.8725	26.3428	27.4418
1.0	33.11756	30.3930	32.9675	36.4065
0.5	48.63752	43.8840	48.7888	54.8803
0.25	74.58356	67.4371	75.0141	84.0966
0.12	111.71345	102.100	112.422	124.430
0.06	161.90493	150.242	162.885	177.142
0.03	215.64020	203.165	216.818	231.793
0.015	270.12353	258.113	271.423	285.673
0.007	325.11486	314.752	326.469	338.752
0.0035	367.45451	359.085	368.812	378.864
0.0017	402.80889	396.535	404.144	411.925

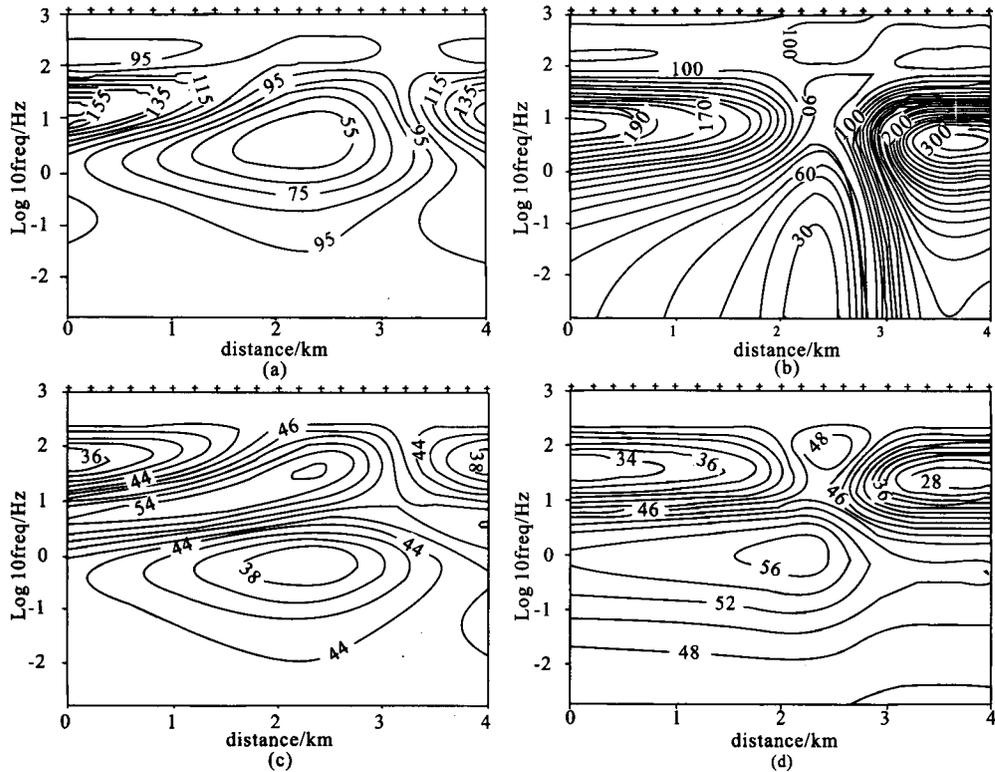


图 3 模型 2 正演结果

(a) 为 TE 模式视电阻率断面图; (b) 为 TM 模式视电阻率断面图; (c) 为 TE 模式相位断面图; (d) 为 TM 模式相位断面图

Fig. 3 Pseudosections of the responses of model two

(a) TE apparent resistivities; (b) TM apparent resistivities; (c) TE phase responses; (d) TM phase responses

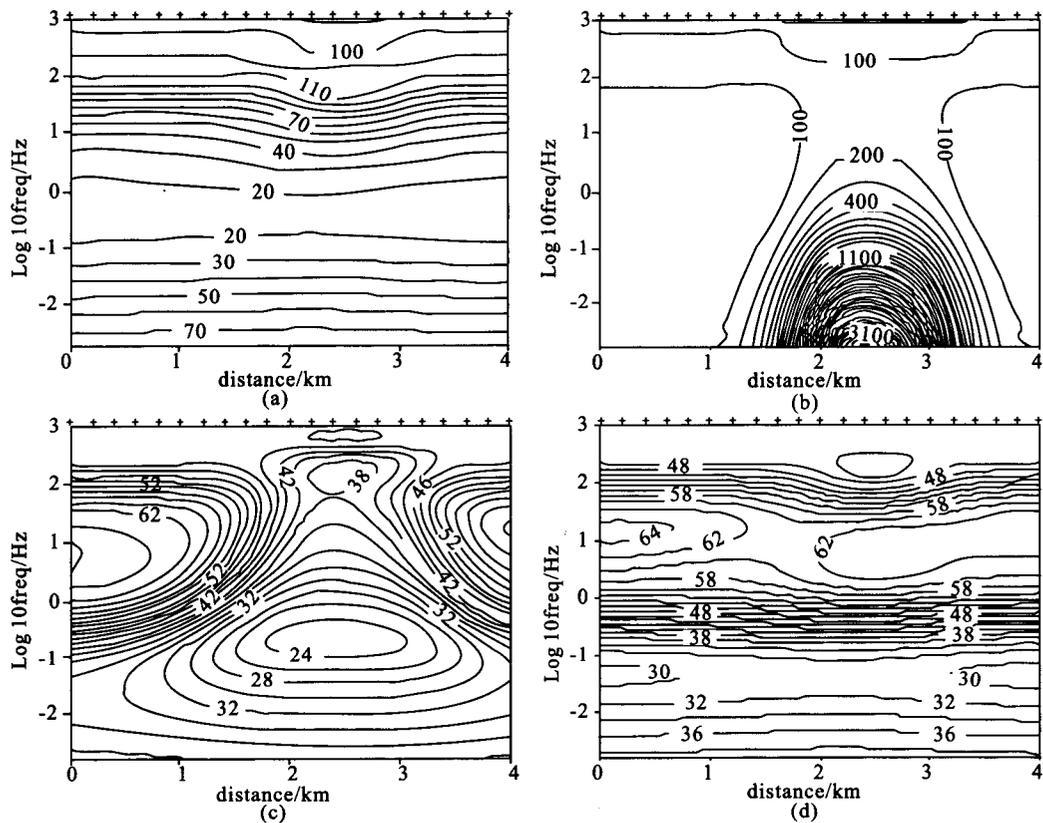


图 4 模型 3 正演结果

(a) 为 TE 模式视电阻率断面图; (b) 为 TM 模式视电阻率断面图; (c) 为 TE 模式相位断面图; (d) 为 TM 模式相位断面图

Fig. 4 Pseudosections of the responses of model three

(a) TE apparent resistivities; (b) TM apparent resistivities; (c) TE phase responses; (d) TM phase responses

明显向下拉伸, 比较而言, TM 模式的相位断面图对模型形态的反映不如 TE 模式的效果好。

模型 3 的形状和模型 2 的一样, 只是将中间的倾斜低阻体 ($10\Omega\cdot m$) 改为高阻体 ($1000\Omega\cdot m$), 将两边的楔形高阻体 ($1000\Omega\cdot m$) 改为低阻体 ($10\Omega\cdot m$), 这样得到如图 4 所示的结果图。从图 4 可看出, 当把低阻体变为高阻体, 高阻体变为低阻体时, TE 模式的视电阻率断面图对高阻体的反映很弱, 而对低阻体的反映很强, TM 模式对高阻体和低阻体的反映还是很明显, 只是它们的形态都被明显的向下拉伸, TE 模式的相位断面图对模型形态的反映还是要比 TM 模式的效果好。

总的而言, TE 模式的纵向分辨率较高, 横向分辨率较低; TM 模式的横向分辨率较高, 纵向分辨率较低。TE 模式的响应对低阻体较高阻体更敏感, 而 TM 模式不受这个影响。两种模式的相位断面图基本不受电阻率的影响, TE 模式的相位断面图比 TM 模式的相位断面图对模型形态的反映准确。

5 结论

合理的模型剖分是获得准确视电阻率的重要条件, 下面根据个人经验归纳一些模型剖分准则: ①垂向网格间距一般可取为趋肤深度的 5%~30%; ②在地表以及界面附近, 网格应适当加密, 在同一介质内, 网格可以相对稀疏一些; ③一般情况下, 边界必须离二维体足够远, 以保证边界上的场符合一维变化规律; ④在同一介质内部, 相邻网格间距不要变化太大。

本文通过合理的模型剖分, 使该算法应用在三层理论模型中的计算最大相对误差为 5.01%, 应用在复杂模型中的结果表明, 该算法是有效的, 对目标矿体的反映准确可靠。

参考文献:

- [1] J H Coggon. Electromagnetic and Electric Modeling by the Finite Element Method [J]. *Geophysics*, 1971,

- 36(1):132~155.
- [2] Willian L Rodi. A Technique for Improving the Accuracy of Finite Element Solutions for Magneto Telluric data[J]. *Geophysics*, 1976, 44:483~506.
- [3] Philip E Wannamaker, John A stodt, Luis Rijo. Two-dimensional Topographic Response in Magnetotellurics Modeled Using Finite Element[J]. *Geophysics*, 1986, 51(11):2131~2144.
- [4] D F Pridmore, G W Hohmann, S H Ward, et al. An investigation of Finite Element Modeling for Electromagnetic and Electrical Data in Three Dimentions [J]. *Geophysics*, 1981, 46:1009~1024.
- [5] 陈乐寿,刘任,王天生. 大地电磁测深资料处理与解释[M]. 北京:石油工业出版社,1989.
- [6] 徐世浙. 地球物理中的有限元法[M]. 北京:科学出版社,1994.
- [7] 陈小斌,张翔,胡文宝. 有限元直接迭代算法在 MT 二维正演计算中的应用[J]. 石油地球物理学报, 2000, 35(4):487~496.
- [8] 熊彬,罗延钟. 电导率分块均匀瞬变电磁 2.5 维有限元数值模拟[J]. 地球物理学报, 2006, 49(2):590~597.
- [9] 谢飞. 带地形大地电磁场二维有限元数值模拟[D]. 北京:中国地质大学,2006.